



University of the Pacific Scholarly Commons

Euler Archive - All Works

Euler Archive

1771

Solution d'une question tres difficile dans le calcul des probabilités

Leonhard Euler

Follow this and additional works at: <https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works>

 Part of the [Mathematics Commons](#)

Record Created:

2018-09-25

Recommended Citation

Euler, Leonhard, "Solution d'une question tres difficile dans le calcul des probabilités" (1771). *Euler Archive - All Works*. 412.
<https://scholarlycommons.pacific.edu/euler-works/412>

This Article is brought to you for free and open access by the Euler Archive at Scholarly Commons. It has been accepted for inclusion in Euler Archive - All Works by an authorized administrator of Scholarly Commons. For more information, please contact mgibney@pacific.edu.



SOLUTION

D'UNE QUESTION TRES DIFFICILE DANS LE CALCUL DES PROBABILITÉS.

PAR MR. EULER.

I.

C'est le plan d'une lotterie qui m'a fourni cette question, que je me propose de développer. Cette lotterie étoit de cinq classes, chacune de 10000 billets, parmi lesquels il y avoit 1000 prix dans chaque classe, & par conséquent 9000 blancs. Chaque billet devoit passer par toutes les cinq classes; & cette lotterie avoit cela de particulier qu'outre les prix de chaque classe on s'engageoit de payer un ducat à chacun de ceux dont les billets auroient passé par toutes les cinq classes sans rien gagner. On voit bien que cette dernière dépense, à laquelle la Lotterie s'engage, est très incertaine, vu qu'il seroit possible d'un côté, que tous les prix dans chaque classe tombassent sur les mêmes numéros, & dans ce cas il y en auroit 9000 à chacun desquels il faudroit un ducat. Or, de l'autre côté, si tous les prix des cinq classes tomboient sur des numéros différens, il y auroit en tout 5000 billets gagnans, & autant de perdans, de sorte que dans ce cas ladite dépense ne monteroit qu'à 5000 ducats. L'un & l'autre de ces deux cas étant presque moralement impossible, la question est de déterminer le nombre des ducats que la lotterie sera probablement obligée de payer. Pour cet effet il faut faire un dénombrement parfait de tous les cas possibles, pour chaque nombre de ceux qui perdront dans toutes les cinq classes, depuis le plus petit de 5000 jusqu'au plus grand de 9000.



2. Pour rendre cette recherche & plus générale & plus lumineuse, je poserai

- 1°. Le nombre des classes de la lotterie $\quad \quad \quad = k.$
- 2°. Le nombre des prix dans chaque classe $\quad \quad \quad = n.$
- 3°. Le nombre des billets blancs de chacune $\quad \quad \quad = m.$
- 4°. Donc le nombre de tous les billets $\quad \quad \quad = m + n.$

Chacun de ces $m + n$ billets passe par toutes les k classes, dans chacune desquelles il gagnera ou perdra; & s'il arrive qu'il ne gagne rien dans toutes les classes, alors il jouira du bénéfice mentionné d'un ducat. Il s'agit donc d'estimer selon les regles de la probabilité le nombre des billets qui passeront par toutes les classes sans rien gagner; & d'abord, pour connoître les limites de ce nombre, supposons que tous les prix de chaque classe tombent sur les mêmes billets: dans ce cas donc il n'y aura que n billets qui gagnent, & tous les autres, dont le nombre est $= m$, seront dans le cas de recevoir un ducat, de sorte que cette dépense est de m ducats pour le fond de la lotterie, & c'est la plus grande possible. Or elle sera la plus petite lorsqu'il arrivera que tous les prix de chaque classe tombent sur des billets différens: dans ce cas le nombre de ceux qui gagnent en quelque classe que ce soit, sera $= kn$, & partant le nombre de ceux qui perdent $= m + n - kn = m - (k - 1)n$. Par conséquent la dépense dans ce cas ne sera que de $m - (k - 1)n$ ducats, en supposant que le nombre m est plus grand que $(k - 1)n$: car s'il lui étoit égal, ou même plus petit, cette dépense se réduiroit à rien.

3. Voilà donc la question dont il faut chercher la solution. Il s'agit de trouver, parmi tous les cas possibles, ceux où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les k classes sera, ou m , ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$, ou $m - 4$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$. Ensuite on fait par les regles de la probabilité, que chacun de ces nombres divisé par le nombre de tous les cas possibles exprime

exprime la probabilité que ce cas existe, laquelle sera d'autant plus grande qu'elle approche plus de l'unité; & si elle devenoit égale à l'unité, ce seroit une marque d'une entière certitude. Cela arrive dans le cas d'une seule classe, où $k = 1$, attendu que le nombre des perdans est alors certainement $= m$, & l'expression pour la probabilité devient alors $= 1$, ou bien elle marque une certitude entière. Mais, si la lotterie est composée de plusieurs classes, de sorte que $k > 1$, on aura toujours plusieurs cas à développer, selon que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est, ou m , ou $m - 1$, ou $m - 2$, ou $m - 3$ &c. jusqu'à $m - (k - 1)n$: & ayant trouvé la probabilité de chacun de ces cas, puisqu'il faut de toute nécessité que quelqu'un d'eux existe, il est évident que la somme de toutes ces probabilités ensemble est égale à l'unité ou à la mesure d'une certitude entière. Cette propriété sert d'ailleurs à vérifier les solutions qu'on donne des questions pareilles; mais ici elle me servira à trouver la solution même du problème proposé, & je doute fort que sans ce secours on y puisse réussir.

4. Je suppose d'abord qu'on ait déjà tiré la première classe, & que les prix soient tombés sur les billets marqués A, B, C, D, E &c. dont le nombre est $= n$. Maintenant, en passant à la seconde classe, où il y a encore n prix, le nombre de tous les billets étant $= m + n$, je remarque que le nombre de toutes les variations possibles parmi les n billets auxquels les prix sont attachés, sans avoir égard à leur ordre,

$$\text{est} = \frac{(m+n)(m+n-1)(m+n-2) \dots (m+1)}{1. \quad 2. \quad 3. \quad \dots \quad n};$$

& si l'on veut aussi avoir égard à la diversité de l'ordre suivant lequel ils sortent successivement, on n'a qu'à omettre le dénominateur, & le nombre de tous les cas possibles sera $= (m+n)(m+n-1)(m+n-2) \dots (m+1)$. Or, considérant aussi la diversité de l'ordre, le nombre de tous les cas où les prix se rencontrent avec les mêmes billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la première classe & dont le nombre est $= n$, est exprimé ainsi



1. 2. 3. 4 n . Donc, pour que les prix de la seconde classe tombent sur les mêmes billets que dans la première, la probabilité est =

$$\frac{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n}{(m+1)(m+2)(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m+n)},$$

& que la même chose arrive aussi dans la troisième, la probabilité est égale au carré de cette expression, dans la quatrième au cube, & ainsi de suite. Par conséquent, que dans toutes les k classes les prix tombent sur les mêmes billets, la probabilité fera =

$$\left(\frac{1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n}{(m+1)(m+2)(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (m+n)} \right)^{k-1}.$$

5. Je remarque sur cette expression, 1°. que le nombre de toutes les variations possibles par rapport aux billets qui se rencontrent avec les prix, dans toutes les classes ensemble, est = $((m+1)(m+2)(m+3) \quad . \quad . \quad . \quad (m+n))^{k-1}$, en tenant aussi compte de la diversité dans l'ordre où les billets qui gagnent, sortent successivement; ensuite 2°. que le nombre de tous les cas possibles que précisément les billets marqués A, B, C, D &c. se rencontrent avec les prix dans toutes les classes, est

$$(1. \quad 2. \quad 3. \quad 4 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n)^{k-1},$$

de sorte que ce nombre divisé par celui-là exprime la probabilité que ce cas existe, comme je viens de le trouver. Mais la remarque la plus essentielle, qui me conduira au but proposé, consiste en ce que le nombre de tous les cas possibles, où dans toutes les k classes les prix se rencontrent avec les mêmes billets marqués A, B, C &c. dépend uniquement 1° du nombre des prix n , ou bien de celui des billets A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la première classe, & 2°. du nombre des classes k de la lotterie; de sorte que le nombre des autres billets, qui est = m , n'entre point du tout en considération; ou bien, quelque grand que soit le nombre de tous les billets, le nombre
des



des cas qui font gagner les mêmes billets dans toutes les classes demeurer-toujours le même. Qu'on n'oublie point que je parle ici toujours de toutes les variations possibles, tant dans les billets même que dans leur ordre.

6. Posons pour abréger

$$((m+1)(m+2)(m+3) \dots (m+n))^{k-1} = M,$$

$$\& (1. 2. 3. 4 \dots n)^{k-1} = a,$$

& le nombre des cas où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit $= m$, sera $= a$, & la probabilité que quelqu'un de ces cas existe sera $= \frac{a}{M}$. Maintenant je passe au second cas,

où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 1$; & je remarque qu'outre les billets marqués A, B, C, D &c. qui ont gagné dans la première classe, il faut que l'un des autres, dont le nombre est $= m$, gagne aussi dans une ou plusieurs des autres classes; puisque ce bonheur peut arriver à chacun des m billets, le nombre de tous ces cas sera exprimé par ϵm , où ϵ ne renferme plus le nombre m , mais dépend uniquement des combinaisons avec les autres billets qui gagnent dans les classes suivantes. De la même manière pour le troisième cas; où le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes est $= m - 2$, il faut combiner deux billets de ceux qui ont perdu dans la première, qui recevant $m(m-1)$ variations, le nombre de tous ces cas aura cette forme $\gamma m(m-1)$. Pour le quatrième cas, où le nombre des perdans par toutes les classes est $= m - 3$, le nombre de tous les cas possibles sera $= \delta m(m-1)(m-2)$; & ainsi de suite pour les cas suivans où le nombre de perdans dans toutes les classes est ou $m - 4$, ou $m - 5$, ou $m - 6$ &c. jusqu'à $m - (k-1)n$.

7. Pour voir d'un coup d'oeil toutes ces suppositions, je les représenterai de cette façon :



Nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes.	Nombre de tous les cas où cela arrive.	Probabilité que quelqu'un de ces cas existe.
m	α	$\frac{\alpha}{M}$
$m-1$	ϵm	$\frac{\epsilon m}{M}$
$m-2$	$\gamma m (m-1)$	$\frac{\gamma m (m-1)}{M}$
$m-3$	$\delta m (m-1)(m-2)$	$\frac{\delta m (m-1)(m-2)}{M}$
$m-4$	$\epsilon m (m-1)(m-2)(m-3)$	$\frac{\epsilon m (m-1)(m-2)(m-3)}{M}$
.	.	.
.	.	.
.	.	.
$m-(k-1)n$	$\omega m(m-1)\dots(m-kn+n+1)$	$\frac{\omega m(m-1)\dots(m-kn+n+1)}{M}$

où pour abréger j'ai posé

$$M = ((m+1)(m+2)(m+3) \dots (m+n))^{k-1}.$$

Ayant déjà trouvé la première valeur

$$\alpha = (1. 2. 3. 4. \dots n)^{k-1},$$

tout revient à chercher les valeurs des lettres suivantes $\epsilon, \gamma, \delta, \epsilon$ &c. ce qui se pourroit faire suivant les principes de la combinaison & variation; mais cela demanderoit des recherches fort épineuses & ennuyantes, qu'on auroit même bien de la peine à pousser si loin qu'on en



en pût découvrir la loi de la progression : encore une telle loi conclue uniquement par induction seroit fort sujette à caution.

8. Mais la considération que toutes ces probabilités ensemble doivent être égales à l'unité, nous fournit une route fort aisée pour déterminer toutes ces quantités α , β , γ , δ &c. Nous n'avons qu'à satisfaire à cette équation :

$$M = \alpha + \beta m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) \\ + \epsilon m(m-1)(m-2)(m-3) \&c.$$

en observant que les quantités α , β , δ , ϵ &c. ne dépendent point du nombre m , mais qu'elles sont uniquement déterminées par les deux autres n & k . Voici de quelle manière on doit conduire le raisonnement pour arriver à ce but. Puisque cette équation doit toujours avoir lieu, quelque valeur qu'on donne au nombre m , posons d'abord $m = 0$, & nous aurons

$$(1.2.3 \dots n)^{k-1} = \alpha,$$

d'où nous tirons la même valeur pour α , que je lui ai assignée auparavant. Posons ensuite pour m successivement les nombres 1, 2, 3, 4 &c. pour avoir ces équations

$$(2.3.4 \dots (n+1))^{k-1} = \alpha + \beta,$$

$$(3.4.5 \dots (n+2))^{k-1} = \alpha + 2\beta + 2\gamma,$$

$$(4.5.6 \dots (n+3))^{k-1} = \alpha + 3\beta + 6\gamma + 6\delta$$

$$(5.6.7 \dots (n+4))^{k-1} = \alpha + 4\beta + 12\gamma + 24\delta + 24\epsilon,$$

$$(6.7.8 \dots (n+5))^{k-1} = \alpha + 5\beta + 20\gamma + 60\delta + 120\epsilon + 120\zeta,$$

&c.

d'où l'on tirera sans difficulté successivement les valeurs de toutes les lettres β , γ , δ , ϵ , ζ &c. jusqu'à la dernière ω , qu'on trouvera aisément être $= 1$, puisque le nombre des cas où tous les prix tombent sur des billets différens est

$$m(m-1)(m-2)(m-3) \dots (m-(k-1)n+1).$$

Oo 2



9. Soit, pour abréger, la valeur de M , en y posant en général $m = \lambda$ indiquée de cette sorte, $M^{(\lambda)}$, & nous aurons

$$M^{(0)} = a,$$

$$M^{(1)} = a + 6,$$

$$M^{(2)} = a + 26 + 2\gamma,$$

$$M^{(3)} = a + 36 + 6\gamma + 6\delta,$$

$$M^{(4)} = a + 46 + 12\gamma + 24\delta + 24\epsilon,$$

&c.

d'où prenant les différences:

$$M^{(1)} - M^{(0)} = 6,$$

$$M^{(2)} - M^{(1)} = 6 + 2\gamma,$$

$$M^{(3)} - M^{(2)} = 6 + 4\gamma + 6\delta,$$

$$M^{(4)} - M^{(3)} = 6 + 6\gamma + 18\delta + 24\epsilon,$$

&c.

& les secondes différences seront:

$$M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)} = 2\gamma,$$

$$M^{(3)} - 2M^{(2)} + M^{(1)} = 2\gamma + 6\delta,$$

$$M^{(4)} - 2M^{(3)} + M^{(2)} = 2\gamma + 12\delta + 24\epsilon,$$

&c.

de plus les troisiemes différences:

$$M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)} = 6\delta,$$

$$M^{(4)} - 3M^{(3)} + 3M^{(2)} - M^{(1)} = 6\delta + 24\epsilon,$$

&c.

& les quatriemes:

$$M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)} = 24\epsilon,$$

&c.

Sur la continuation de ces différences il ne fauroit y avoir aucun doute.



10. Toutes ces valeurs $M^{(0)}$, $M^{(1)}$, $M^{(2)}$ &c. dérivées de $M = (m+1)(m+2)(m+3) \dots (m+n)^{k-1}$ étant connues & indépendantes du nombre m , les quantités α , β , γ , δ &c. qui renferment la solution de notre question, seront déterminées ainsi :

$$\alpha = M^{(0)},$$

$$\beta = \frac{M^{(1)} - M^{(0)}}{1},$$

$$\gamma = \frac{M^{(2)} - 2M^{(1)} + M^{(0)}}{1 \cdot 2},$$

$$\delta = \frac{M^{(3)} - 3M^{(2)} + 3M^{(1)} - M^{(0)}}{1 \cdot 2 \cdot 3},$$

$$\epsilon = \frac{M^{(4)} - 4M^{(3)} + 6M^{(2)} - 4M^{(1)} + M^{(0)}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4},$$

&c.

Or, parmi ces diverses valeurs dérivées de M , nous connoissons les rapports suivans :

$$M^{(1)} = \left(\frac{n+1}{1}\right)^{k-1} M^{(0)},$$

$$M^{(2)} = \left(\frac{n+2}{2}\right)^{k-1} M^{(1)}$$

$$M^{(3)} = \left(\frac{n+3}{3}\right)^{k-1} M^{(2)},$$

$$M^{(4)} = \left(\frac{n+4}{4}\right)^{k-1} M^{(3)},$$

&c.

la première étant $M^{(0)} = (1. 2. 3. 4 \dots n)^{k-1}$. D'où, par cette seule valeur $M^{(0)}$, nous aurons

$$\epsilon = \frac{\alpha}{1} \left(\left(\frac{n+1}{1} \right)^{k-1} - 1 \right),$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{1.2} \left(\left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \right)^{k-1} - 2 \left(\frac{n+1}{1} \right)^{k-1} + 1 \right),$$

$$\delta = \frac{\alpha}{1.2.3} \left(\left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \right)^{k-1} - 3 \left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \right)^{k-1} + 3 \left(\frac{n+1}{1} \right)^{k-1} - 1 \right),$$

$$\begin{aligned} \epsilon = \frac{\alpha}{1.2.3.4} & \left(\left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \cdot \frac{n+4}{4} \right)^{k-1} \right. \\ & - 4 \left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \cdot \frac{n+3}{3} \right)^{k-1} \\ & + 6 \left(\frac{n+1}{1} \cdot \frac{n+2}{2} \right)^{k-1} \\ & \left. - 4 \left(\frac{n+1}{1} \right)^{k-1} + 1 \right), \end{aligned}$$

dont la progression est également évidente.

11. Pour mieux voir la nature de ces nombres $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ &c. développons quelques cas particuliers, & supposons d'abord qu'il n'y ait qu'un seul prix dans chaque classe, de sorte que $n = 1$, le nombre des classes demeurant $= k$. Soit $k = \pi + 1$ pour avoir $k - 1 = \pi$. Le nombre de tous les billets dans chaque classe fera donc $= m + 1$, & $M = (m + 1)^\pi$ & partant

$$M^{(0)} = 1; M^{(1)} = 2^\pi; M^{(2)} = 3^\pi; M^{(3)} = 4^\pi; M^{(4)} = 5^\pi \text{ &c.}$$

d'où



d'où nous tirons les valeurs suivantes :

	si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$	si $\pi = 4$	si $\pi = 5$
$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$	$\alpha = 1$
$\beta = \frac{2^\pi - 1}{1}$	$\beta = 1$	$\beta = 3$	$\beta = 7$	$\beta = 15$	$\beta = 31$
$\gamma = \frac{3^\pi - 2 \cdot 2^\pi + 1}{1 \cdot 2}$	$\gamma = 0$	$\gamma = 1$	$\gamma = 6$	$\gamma = 25$	$\gamma = 90$
$\delta = \frac{4^\pi - 3 \cdot 3^\pi + 3 \cdot 2^\pi - 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}$	$\delta = 0$	$\delta = 0$	$\delta = 1$	$\delta = 10$	$\delta = 65$
$\epsilon = \frac{5^\pi - 4 \cdot 4^\pi + 6 \cdot 3^\pi - 4 \cdot 2^\pi + 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 15$
&c.	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 1$

12. Soit maintenant le nombre des prix de chaque classe $n = 2$, les deux autres nombres m & $k = \pi + 1$ demeurant indéterminés. Donc, puisque $M = (m + 1)^\pi (m + 2)^\pi$, nous aurons :

$$M^{(0)} = 2^\pi; \quad M^{(1)} = 6^\pi; \quad M^{(2)} = 12^\pi; \quad M^{(3)} = 20^\pi \quad \&c.$$

& partant :

	si $\pi = 1$	si $\pi = 2$	si $\pi = 3$
$\alpha = 2^\pi,$	$\alpha = 2$	$\alpha = 4$	$\alpha = 8$
$\beta = \frac{6^\pi - 2^\pi}{1},$	$\beta = 4$	$\beta = 32$	$\beta = 208$
$\gamma = \frac{12^\pi - 2 \cdot 6^\pi + 2^\pi}{1 \cdot 2},$	$\gamma = 1$	$\gamma = 38$	$\gamma = 652$
$\delta = \frac{20^\pi - 3 \cdot 12^\pi + 3 \cdot 6^\pi - 2^\pi}{1 \cdot 2 \cdot 3},$	$\delta = 0$	$\delta = 12$	$\delta = 576$
&c.	$\epsilon = 0$	$\epsilon = 1$	$\epsilon = 188$
	$\zeta = 0$	$\zeta = 0$	$\zeta = 24$
	$\eta = 0$	$\eta = 0$	$\eta = 1$



13. Il seroit inutile de développer plusieurs cas, puisque la détermination des nombres α , β , γ , δ &c. demanderoit des calculs trop embarrassans qui même, au bout du compte, ne nous fourniroient aucun éclaircissement sur la question dont il s'agit. D'où l'on comprend que, si l'on vouloit appliquer ces formules à l'exemple de la loterie rapportée au commencement, en supposant

$$n = 1000, \quad m = 9000, \quad \& \quad k = 5,$$

d'où résulteroit le nombre

$$M = (9001. 9002. 9003 \quad . \quad . \quad . \quad 10000)^4,$$

& ceux qui en sont dérivés

$$M^{(0)} = (1. 2. 3 \quad . \quad . \quad . \quad 1000)^4,$$

$$M^{(1)} = (2. 3. 4 \quad . \quad . \quad . \quad 1001)^4,$$

$$M^{(2)} = (3. 4. 5 \quad . \quad . \quad . \quad 1002)^4,$$

$$M^{(3)} = (4. 5. 6 \quad . \quad . \quad . \quad 1003)^4,$$

on seroit obligé de s'enfoncer dans de terribles calculs avant que de parvenir à la connoissance des nombres α , β , γ , δ &c. dont la multitude monte à 4001. Ensuite il faudroit encore multiplier chacun de ces nombres par les coefficients assignés au §. 7. pour avoir les nombres de tous les cas où chaque variété peut arriver. Et enfin, ayant trouvé tous ces nombres, il resteroit à diviser chacun par le nombre M , pour avoir la probabilité que le nombre de ceux qui perdent dans toutes les classes soit ou 9000, ou 8999, ou 8998, jusqu'à ce qu'on parvienne à 5000.

14. Il est bien certain que personne n'entreprendra jamais cet immense ouvrage, dans la seule vue de répondre aux Entrepreneurs de la loterie mentionnée, à combien ils doivent probablement estimer la dépense à laquelle ils s'engagent en promettant un ducat à chacun de ceux qui n'auront rien gagné dans toutes les 5 classes. Donc, s'il n'y avoit point d'autre moyen de satisfaire à cette question, on seroit bien



bien obligé d'en regarder la solution comme moralement impossible, & il n'y auroit d'autre parti à prendre que de conseiller aux Entrepreneurs d'une pareille lotterie de s'en tenir à quelque nombre moyen entre la plus grande somme de 9000 ducats, & la plus petite de 5000 ducats, qui constituent les limites de cette dépense. Au reste, s'il ne s'agissoit que de tirer une seule fois cette lotterie, il ne vaudroit pas même la peine de se livrer à ce travail, quand même il ne seroit pas si difficile, puisqu'un seul coup ne se règle jamais sur la probabilité. Mais si l'on vouloit répéter plusieurs fois de suite cette même lotterie, la question deviendroit plus importante, puisqu'alors la dite dépense seroit, tantôt plus grande, tantôt plus petite : & ce n'est que dans ce cas qu'on pourroit être assuré que le milieu entre toutes ces dépenses approchera d'autant plus de la somme déterminée par les regles de la probabilité, qu'on répétera plus de fois le tirage de cette même lotterie. C'est donc cette somme moyenne que les regles de la probabilité nous doivent découvrir.

15. Or, quelque insurmontables que paroissent les calculs pour trouver cette somme, il se rencontre une certaine circonstance heureuse, qui rend extrêmement facile l'exécution de tous ces calculs, de sorte qu'on n'a pas même besoin de calculer les valeurs des nombres α , β , γ , δ &c. On n'a qu'à s'en tenir aux formules générales données dans le §. 7. & puisque pour chaque nombre de ducats, auquel la dépense peut monter, la probabilité est comme il suit :



que la dépense soit
de tant de ducats

la probabilité
est

m	$\frac{\alpha}{M}$
$m - 1$	$\frac{\epsilon m}{M}$
$m - 2$	$\frac{\gamma m (m - 1)}{M}$
$m - 3$	$\frac{\delta m (m - 1) (m - 2)}{M}$
.	.
.	.
.	.
$m - (k - 1)n$	$\frac{\omega m (m - 1) (m - 2) \dots (m - (k - 1)n + 1)}{M}$

la somme de chaque dépense multipliée par la probabilité donnera la vraie dépense moyenne que nous cherchons, qui sera par conséquent =

$$\frac{\alpha m + \epsilon m(m-1) + \gamma m(m-1)(m-2) \dots + \omega m(m-1) \dots (m-(k-1)n)}{M},$$

& je remarque que la valeur de cette expression peut être assignée sans qu'on ait besoin de développer, ni les nombres α , ϵ , γ , δ &c. ni même le dénominateur M ; ce qui est sans doute un événement auquel on ne pouvoit pas s'attendre.

16. Ayant fait voir ci-dessus, que les nombres α , ϵ , δ &c. ne dépendent pas du nombre m , & qu'ils doivent être tels qu'il soit

$$\begin{aligned} & \alpha + \epsilon m + \gamma m(m-1) + \delta m(m-1)(m-2) + \dots \\ & + \omega m(m-1)(m-2) \dots (m-(k-1)n+1) \\ & = M = ((m+1)(m+2) \dots (m+n))^{k-1}, \end{aligned}$$



il s'en suit d'abord qu'écrivant $m - 1$ au lieu de m , il faut qu'il soit
 $\alpha + \epsilon(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) + \dots + \omega(m-1)(m-2) \dots (m-(k-1)n)$
 $= (m(m+1)(m+2) \dots + (m+n-1))^{k-1}$,

les nombres $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ &c. étant les mêmes qu'auparavant. Mais
 cette dernière expression $\alpha + \epsilon(m-1) + \gamma(m-1)(m-2) + \dots$
 étant multipliée par m donne précisément le numérateur de la fraction,
 que nous venons d'assigner pour la quantité probable de la dépense :

d'où nous concluons cette dépense $= \frac{m(m(m+1)(m+2) \dots (m+n-1))^{k-1}}{((m+1)(m+2) \dots (m+n))^{k-1}}$,

qui se réduit évidemment à celle-ci $= m \left(\frac{m}{m+n} \right)^{k-1}$, dont l'ap-

plication se fera aisément à chaque cas proposé, sans qu'on ait besoin
 de calculer ni les valeurs des lettres $\alpha, \epsilon, \gamma, \delta$ &c. ni le nombre M .
 Voilà donc, contre toute attente, une solution aussi simple que belle de
 notre question, par laquelle nous connoissons qu'en général, le nombre
 des classes étant $= k$, le nombre des prix de chaque classe $= n$, &
 le nombre de tous les billets $= m + n$, la dépense en question

doit être estimée $= m \left(\frac{m}{m+n} \right)^{k-1}$.

17. Pour le cas de la lotterie décrite au commencement, où
 $k = 5$, $n = 1000$ & $m = 9000$, la dépense en faveur de
 ceux qui ne gagnent rien dans toutes les cinq classes doit être estimée
 à $9000 \left(\frac{9}{10} \right)^4$ ducats, ce qui fait $5904 \frac{4}{5}$ ducats, d'où l'on voit que
 ce milieu est beaucoup plus proche de la plus petite limite 5000 que
 de la plus grande 9000.

Soit, pour donner un autre exemple, le nombre des classes en-
 core $k = 5$, le nombre des prix de chaque classe $n = 8000$, &
 celui de tous les billets $m + n = 50000$; donc $m = 42000$:
 & quand on s'engage de payer aussi un ducat à chacun de ceux qui



passent par les cinq classes sans rien gagner, cette dépense doit être estimée selon les règles de la probabilité à 42000 $(\frac{4}{5})^4$, c'est à dire, à 20910 $\frac{1}{5}$ ducats.

18. En général, je remarque sur l'estime de cette dépense que je viens de trouver $= m \left(\frac{m}{m+n} \right)^{k-1}$, que quand il n'y aura qu'une seule classe, elle sera $= m$ auquel cas la probabilité devient une entière certitude. Mais, si la lotterie est composée de 2 classes, cette dépense est $= \frac{m m}{m+n}$; pour trois classes elle devient $= \frac{m^3}{(m+n)^2}$, pour quatre $= \frac{m^4}{(m+n)^3}$, & ainsi de suite; de sorte qu'elle décroît en raison de $m+n$ à m pour chaque classe de plus. Donc, si le nombre des classes étoit infini, cette dépense se réduiroit à rien, quelque petit que soit le nombre des prix par rapport à tous les billets. Comme cette simple formule vient d'être conclue d'un calcul extrêmement embarrassé, il n'y a aucun doute qu'il n'y ait une autre méthode fort simple, qui y conduise directement sans aucun détour. En effet, la seule considération de cette formule nous fournit d'abord les raisonnemens qu'il faut faire pour y parvenir, que je vais mettre dans tout leur jour.

19. On n'a qu'à parcourir successivement toutes les classes, en réfléchissant que chaque classe contient en tout $m+n$ billets, parmi lesquels il y a n gains & m pertes. Donc, la première classe étant tirée, il y aura certainement m billets qui auront perdu; ceux-ci entrant dans la seconde classe, il est probable qu'il y en aura quelques uns, qui gagnent, & cela dans le rapport du nombre de tous les billets $m+n$ au nombre des prix n : donc, de ces m billets qui ont perdu dans la première classe, il y aura probablement $m \cdot \frac{n}{m+n}$ qui gagneront dans la

seconde



seconde classe, & partant le nombre de ceux qui passent par les deux premières classes sans rien gagner, doit être estimé $= m \cdot \frac{m}{m+n}$.

Maintenant ces billets entrent dans la troisième classe, & par la même raison leur nombre entier sera à celui des billets qui perdront aussi dans cette classe comme $m+n$ à m ; par conséquent le nombre des billets qui passeront par les trois premières classes sans rien gagner, sera probable-

ment $= m \left(\frac{m}{m+n} \right)^2$. Par ce même raisonnement on trouve que

le nombre des billets qui passeront probablement par quatre classes sans rien gagner, sera $= m \left(\frac{m}{m+n} \right)^3$; & en général, si le nombre des

classes est $= k$, le nombre des billets qui passeront par toutes ces classes sans rien gagner doit être fixé selon les règles de la probabilité à

$m \left(\frac{m}{m+n} \right)^{k-1}$; & si l'on s'engage de payer à chacun un ducat, cette

dépense doit être estimée à $m \left(\frac{m}{m+n} \right)^{k-1}$ ducats, ce qui est précisé-

ment la somme que j'ai trouvée auparavant.

20. Si cette route est préférable à la première à cause de sa simplicité, la première a d'autres avantages très considérables en nous découvrant en détail la probabilité, que la dépense égale précisément une somme donnée. Car, comme il n'est pas même probable que la dépense actuelle soit la même que montre la probabilité, il est très important que le dénombrement de tous les cas possibles nous soit bien connu pour nous mettre en état de juger de la probabilité de chacun. Mais la dernière méthode a pourtant cet avantage sur la première, qu'elle peut être appliquée à des cas où toutes les classes de la loterie ne contiennent pas le même nombre de prix; laquelle circonstance rendroit presque



impossible la premiere methode. Cependant il faut toujours supposer que le nombre de tous les billets soit le même dans toutes les classes, puisque sans cette condition la question dont il s'agit ne sauroit avoir lieu. Soit donc l le nombre de tous les billets de chaque classe, & posons le nombre de ceux qui perdent dans la premiere classe $= m$, dans la seconde $= m'$, dans la troisieme $= m''$, dans la quatrieme $= m'''$ & ainsi de suite. Cela posé, le nombre des billets qui perdront dans toutes les classes sera probablement :

$$m \cdot \frac{m'}{l} \cdot \frac{m''}{l} \cdot \frac{m'''}{l} \cdot \frac{m^{iv}}{l} \cdot \frac{m^v}{l} \cdot \&c.$$

jusqu'à ce qu'on ait parcouru toutes les classes. D'où l'on voit que s'il y avoit une seule classe où tous les billets gagnassent, quelqu'un des nombres m, m', m'', m''' &c. évanouiroit, & le nombre trouvé se réduiroit à zéro; ce qui ne seroit plus la mesure de la probabilité, mais une certitude complete.

21. Pour en donner un exemple, supposons qu'il y ait une lotterie composée de 5 classes, chacune renfermant 10000 billets: & dont la premiere contienne 1000 prix, la seconde 2000, la troisieme 3000, la quatrieme 4000, & la cinquieme 5000. Nous aurons donc $l = 10000$, & les nombres des billets qui perdent dans chaque classe seront :

$$m = 9000; m' = 8000; m'' = 7000; m''' = 6000; m^{iv} = 5000.$$

Et partant le nombre des billets qui passeront par toutes les 5 classes, sans rien gagner, sera conformément aux regles de la probabilité $= 9000 \cdot \frac{8}{10} \cdot \frac{7}{10} \cdot \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{10} = 1512$; ou bien on peut estimer qu'il n'y aura que 1512 billets qui perdront dans toutes les 5 classes; donc il est probable que de tous les 10000 billets il y en aura 8488 qui tireront quelque prix dans une ou plusieurs classes. Par conséquent, pour ceux qui s'intéresseroient dans cette lotterie, on peut dire que la probabilité est $\frac{8488}{10000}$ ou $\frac{2122}{2500}$, qu'ils ne passeront point par toutes les 5 classes sans rien gagner.